

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60015

# Распространение фильтрационных волн в пористой среде, насыщенной газожидкостной смесью

К.ф.-м.н.

Д.ф.-м.н., профессор,  
член-корр. АН РБ, УГНТУ

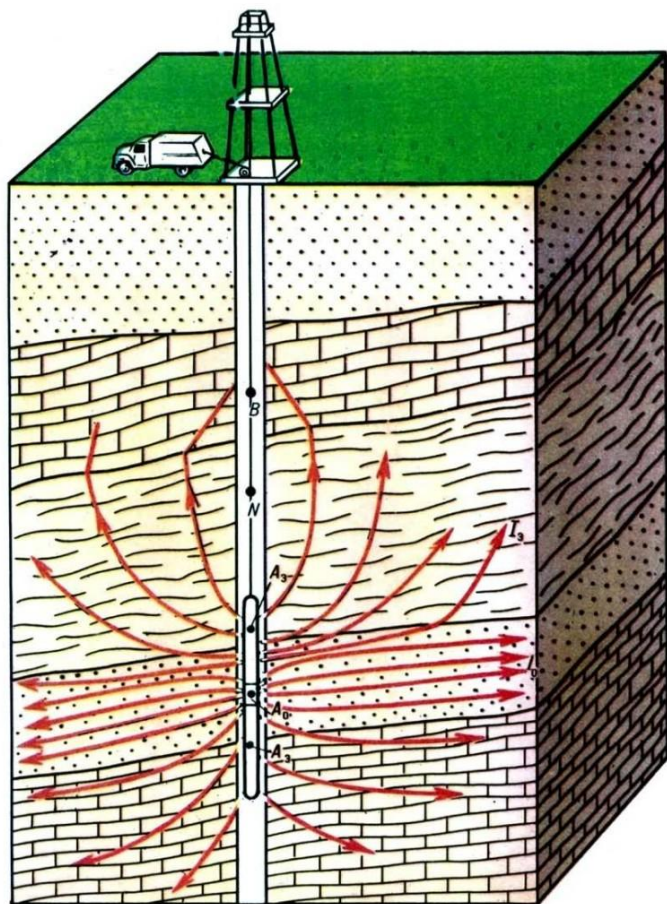
Ситдикова  
Лилия Фидарисовна

Гималтдинов  
Ильяс Кадинович





## Актуальность вопроса





# Основные уравнения

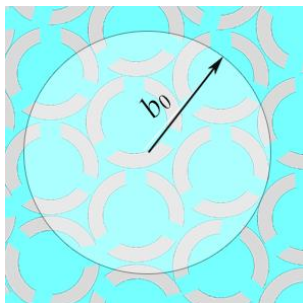
## Размер пузырьков превышает размеры пор ( $v_l = v_g$ )

Уравнение сохранения масс:

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \rho_{j0} \frac{\partial v_j}{\partial x} = 0 \quad (i = l, g, s),$$

Уравнение числа пузырьков:

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + n_{b0} \frac{\partial v_l}{\partial x} = 0,$$



$$\alpha_l + \alpha_g + \alpha_s = 1,$$

$$\alpha_g = \frac{4}{3} \pi b^3 n_b,$$

$$\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i,$$

Уравнение импульсов:

$$(\alpha_{l0} \rho_{l0}^0 + \alpha_{g0} \rho_{g0}^0) \frac{\partial v_l}{\partial t} = -(\alpha_{g0} + \alpha_{l0}) \frac{\partial p_l}{\partial x} - F,$$

$$(\alpha_{l0} \rho_{l0}^0 + \alpha_{g0} \rho_{g0}^0) \frac{\partial v_l}{\partial t} + \alpha_{s0} \rho_{s0}^0 \frac{\partial v_s}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_s^*}{\partial x} - \frac{\partial p_l}{\partial x},$$

$$F = F_m + F_\mu + F_B,$$

$$F_m = \frac{1}{2} \eta_m \alpha_{s0} (\alpha_{l0} \rho_{l0}^0 + \alpha_{g0} \rho_{g0}^0) \left( \frac{\partial v_l}{\partial t} - \frac{\partial v_s}{\partial t} \right),$$

$$F_\mu = \frac{9}{2} \eta_\mu (\alpha_{l0} + \alpha_{g0}) \alpha_{s0} \mu_l (v_l - v_s) a_0^{-2},$$

$$F_B = 6 \eta_B (\alpha_{l0} + \alpha_{g0}) \alpha_{s0} a_0 \sqrt{\pi \rho_l^0 \mu_l} \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} (v_l - v_s) \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}},$$

где  $a_0$  – средний радиус пор,  $b_0$  – радиус пузырьков,  $p_l$  – давление в жидкой фазе,  $\rho_i^0$  – истинные плотности фаз,  $\alpha_i$  – объемные содержания фаз,  $n_b$  – число пузырьков в единице объема,  $F_m$  – сила присоединенных масс, вызванная инерционным взаимодействием фаз,  $F_\mu$  – аналог силы вязкого трения Стокса,  $F_B$  – аналог силы Бассэ, проявляющейся при высоких частотах из-за нестационарности вязкого пограничного слоя около границы с твердой фазой.

Нижними индексами  $i = l, g, s$  отмечены параметры жидкой и газовой фаз и скелета.

# Основные уравнения

## Размер пузырьков превышает размеры пор ( $v_l = v_g$ )

$$\rho_{l0} \left( b \frac{\partial w_R}{\partial t} + \frac{3}{2} w_R^2 \right) = p_g - p_l - 4\mu_l \frac{w_R}{b} \left( 1 + \frac{1}{4} \eta_\mu \left( \frac{b}{a_0} \right)^2 \right)$$

$$w = w_R + w_A, \quad w = \frac{db}{dt}, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \varphi_{g0}^{1/3}}$$

$$\alpha_{s0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E_s} \frac{\partial \sigma_s^*}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_s^*}{\mu_s},$$

$$p_s = p_l - \frac{\sigma_s^*}{\alpha_{s0}}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v_s}{\partial t}$$

$$\frac{\rho_{s0}^0}{\rho_{s0}} = 1 + \beta_s (p_s - p_{s0}),$$

$$\frac{\rho_{l0}^0}{\rho_{l0}} = 1 + \beta_l (p_l - p_{l0}),$$

$$\frac{p_g}{p_{g0}} = \left( \frac{b_0}{b} \right)^{3\gamma} = \left( \frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \right)^\gamma,$$

где  $a_0$  – средний радиус пор,  $b_0$  – радиус пузырьков,  $\gamma$  – показатель адиабаты для газа,  $p_i$  – давления фаз,  $\alpha_s$  – объемные содержания твердой фазы,  $\sigma_s^*$  – приведенное напряжение в скелете,  $w$  – радиальная скорость поверхности пузырьков,  $\mu_l$  – вязкость жидкости,  $\beta_i$  – сжимаемость фаз,  $\varphi_{g0}$  – объемная доля газа в пузырьковой жидкости.

Нижними индексами  $i=l, g, s$  отмечены параметры жидкой и газовой фаз и скелета.

# Дисперсионное соотношение

## Размер пузырьков превышает размеры пор

Решение системы уравнений будем искать в виде затухающих бегущих волн:

$$\rho_j^0, \nu_j, p_j, \alpha_j \cong A_j \exp[i(Kx - \omega t)], \quad K = k + i\delta.$$

$$K^2 = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}, \quad \text{где} \quad \frac{b}{a} = \alpha_{s0} B_1 C_s^{-2} + B_2 \left( C_s^{-2} + \frac{\alpha_{l0} \chi_\mu}{\rho_1} C_l^{-2} + \frac{\alpha_{g0} \chi_\mu}{\rho_3 N} C_g^{-2} \right),$$

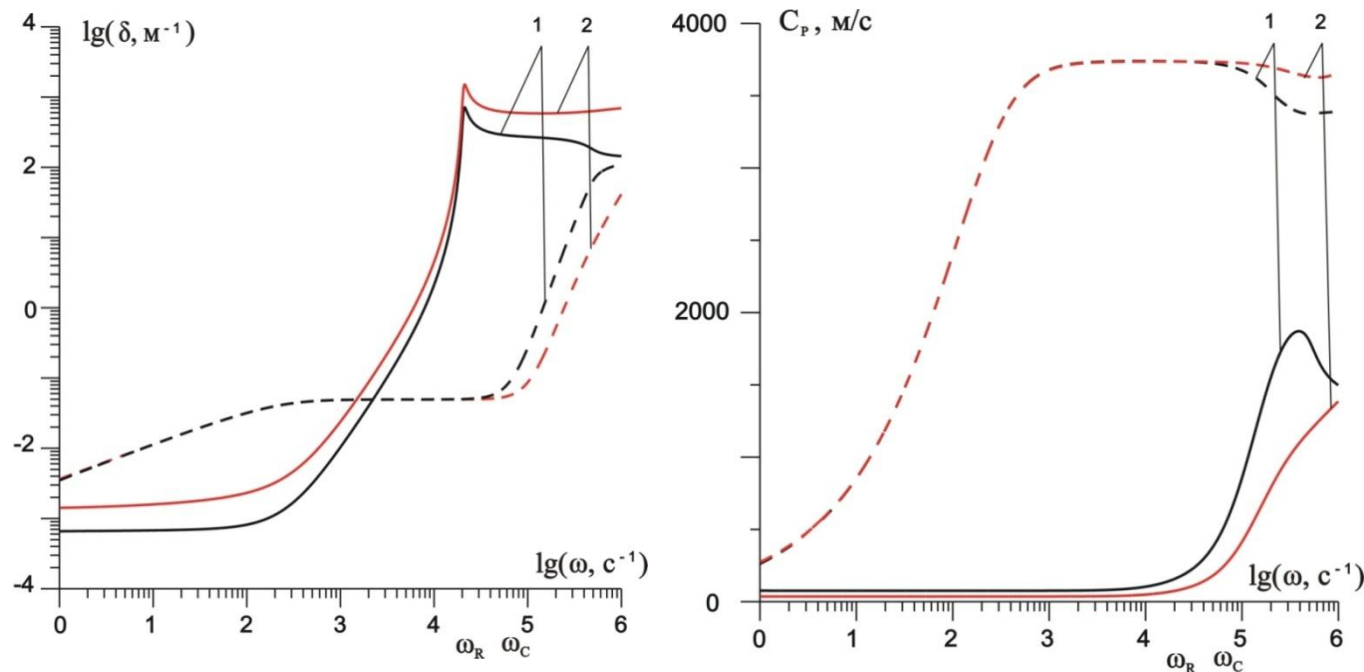
$$\frac{c}{a} = (B_1 + B_3) \left[ \alpha_{s0} C_s^{-4} + \frac{\alpha_{g0}}{\rho_3 N} C_g^{-2} C_s^{-2} \right] + B_4 \frac{\alpha_{l0}}{\rho_1} C_l^{-2} C_s^{-2}, \quad B_4 = (\alpha_{s0} \rho_2 + \alpha_{l0} \rho_1) [1 + i\chi_V (1 - \alpha_{s0})] \rho_1,$$

$$B_1 = \alpha_{s0} \rho_2 + \alpha_{l0} \rho_1 + i\chi_V \alpha_{s0} (1 - \alpha_{s0}) \rho_1, \quad B_3 = i\rho_1 (1 - \alpha_{s0}) \chi_V (\alpha_{g0} \rho_2 + \alpha_{l0} \rho_1), \quad N = 1 + \frac{b_0}{3\gamma p_0 S_2},$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_{l0}^0}{\rho_{s0}^0}, \quad \rho_2 = \frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{s0}^0}, \quad \rho_3 = \frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{l0}^0}, \quad S_1 = \frac{b_0}{4\mu_l + 4\mu_l \eta_\mu (b_0/a_0)^2 - i\omega \rho_{l0}^0 b_0^2}, \quad S_2 = \frac{i}{\omega} \left[ S_1 + \frac{1}{\rho_{l0}^0 C_l \varphi_{g0}^{1/3}} \right],$$

$$C_g = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_{g0}^0}}, \quad C_s = \sqrt{\frac{E_s}{\rho_{s0}^0}}, \quad \chi_V = \frac{1}{\omega \tau^*}, \quad \tau^{*-1} = \frac{1}{2} \left( -i\omega \eta_m + 9\eta_\mu \nu_g a_0^{-2} + \frac{9}{2} \eta_B (1-i) a_0^{-1} \sqrt{2\nu_g \omega} \right), \quad \nu_g = \frac{\mu_g}{\rho_{g0}^0}.$$

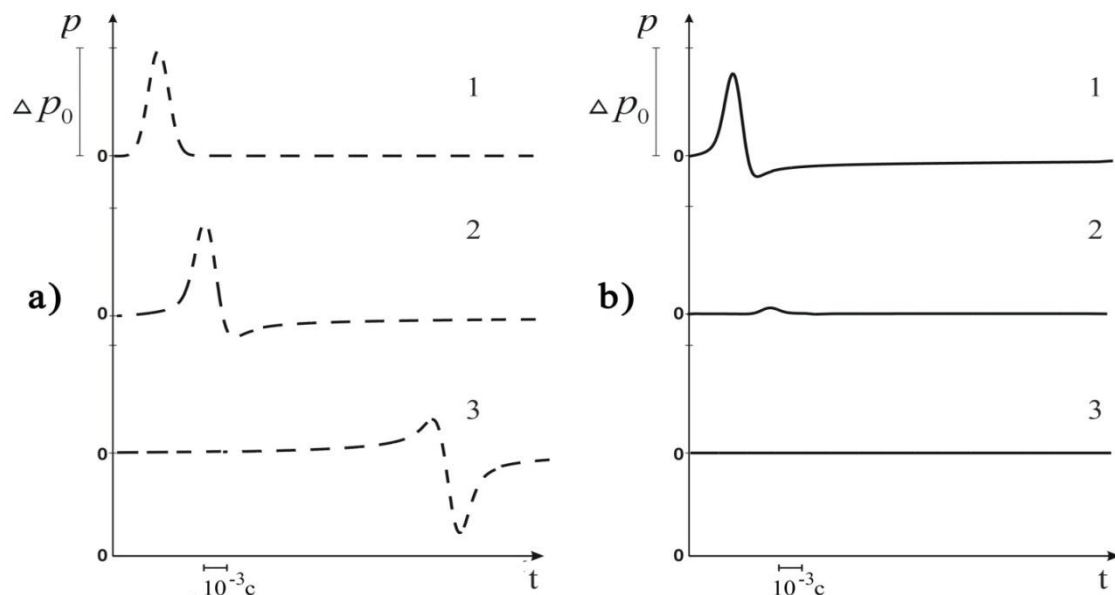
## Размер пузырьков превышает размеры пор



Зависимости коэффициента затухания  $\delta$  и фазовой скорости  $C_p$  «быстрой» (пунктирные линии) и «медленной» (сплошные линии) волн от частоты  $\omega$  для системы песчаник – пузырьковая жидкость. Линия 1 соответствует  $a_0 = 10^{-4} \text{ м}$ ,  $b_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $\alpha_{s0} = 0,6$ ,  $\alpha_{l0} = 0,39$ ,  $\alpha_{g0} = 0,01$ . Линия 2 –  $a_0 = 10^{-4} \text{ м}$ ,  $b_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $\alpha_{s0} = 0,6$ ,  $\alpha_{l0} = 0,35$ ,  $\alpha_{g0} = 0,05$ .



## Размер пузырьков превышает размеры пор



Линии 1, 2, 3 соответствуют показаниям датчиков D1, D2 и D3 расположенных соответственно на расстоянии 0,01м; 0,5м и 2м от места инициирования первоначального импульсного давления.

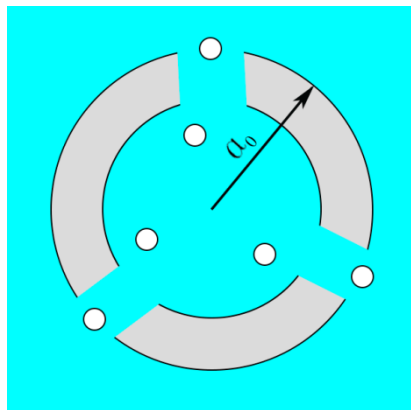
Динамика волнового импульса в пористой среде, насыщенной пузырьковой жидкостью. Характерные размеры:  $a_0 = 10^{-4}$  м,  $b_0 = 10^{-3}$  м,  $\alpha_{s0} = 0,6$ ,  $\alpha_{t0} = 0,39$ ,  $\alpha_{g0} = 0,01$ .

Картинки а) и б) соответствуют «быстрой» и «медленной» волнам.

# Основные уравнения

Пузырьки газа находятся внутри жидкости ( $v_l = v_g$ )

В этом случае используется система, приведенная в случае, когда размер пузырьков превышает размеры пор, но уравнение изменение радиуса пузырька имеет вид:



$$\rho_{l0} \left( b \frac{\partial w_R}{\partial t} + \frac{3}{2} w_R^2 \right) = p_g - p_l - 4\mu_l \frac{w_R}{b},$$

$$w = w_R + w_A, \quad w = \frac{db}{dt}, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \varphi_{g0}^{1/3}}$$



# Дисперсионное соотношение

## Пузырьки газа находятся внутри жидкости

$$K^2 = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}, \quad \text{где} \quad \frac{b}{a} = \alpha_{s0} B_1 C_s^{-2} + B_2 \left( C_s^{-2} + \frac{\alpha_{l0} \chi_\mu}{\rho_1} C_l^{-2} + \frac{\alpha_{g0} \chi_\mu}{\rho_3 N} C_g^{-2} \right),$$

$$\frac{c}{a} = (B_1 + B_3) \left[ \alpha_{s0} C_s^{-4} + \frac{\alpha_{g0}}{\rho_3 N} C_g^{-2} C_s^{-2} \right] + B_4 \frac{\alpha_{l0}}{\rho_1} C_l^{-2} C_s^{-2}, \quad B_4 = (\alpha_{s0} \rho_2 + \alpha_{l0} \rho_1) [1 + i \chi_V (1 - \alpha_{s0})] \rho_1,$$

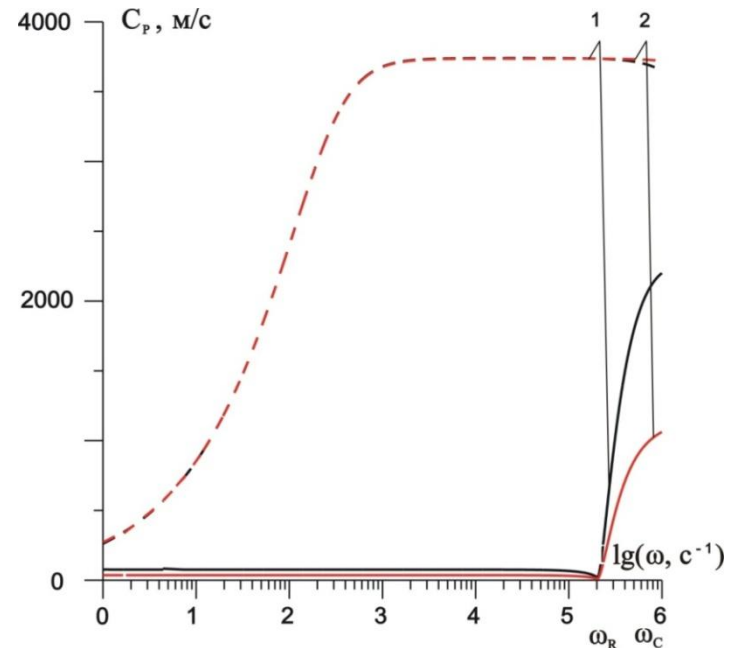
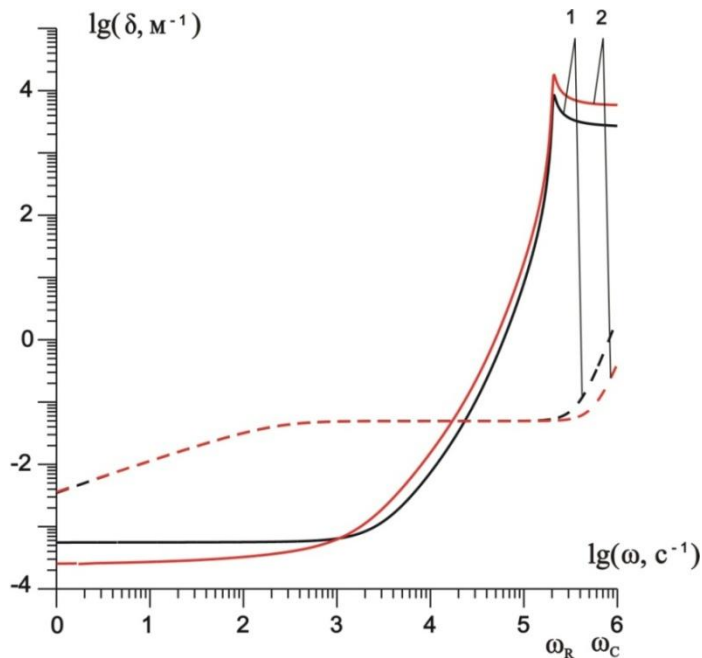
$$B_1 = \alpha_{s0} \rho_2 + \alpha_{l0} \rho_1 + i \chi_V \alpha_{s0} (1 - \alpha_{s0}) \rho_1, \quad B_3 = i \rho_1 (1 - \alpha_{s0}) \chi_V (\alpha_{g0} \rho_2 + \alpha_{l0} \rho_1), \quad N = 1 + \frac{b_0}{3\gamma p_0 S_2},$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_{l0}^0}{\rho_{s0}^0}, \quad \rho_2 = \frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{s0}^0}, \quad \rho_3 = \frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{l0}^0}, \quad C_g = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_{g0}^0}}, \quad C_s = \sqrt{\frac{E_s}{\rho_{s0}^0}},$$

$$\chi_V = \frac{1}{\omega \tau^*}, \quad \tau^{*-1} = \frac{1}{2} \left( -i \omega \eta_m + 9 \eta_\mu v_g a_0^{-2} + \frac{9}{2} \eta_B (1 - i) a_0^{-1} \sqrt{2 v_g \omega} \right), \quad v_g = \frac{\mu_g}{\rho_{g0}^0},$$

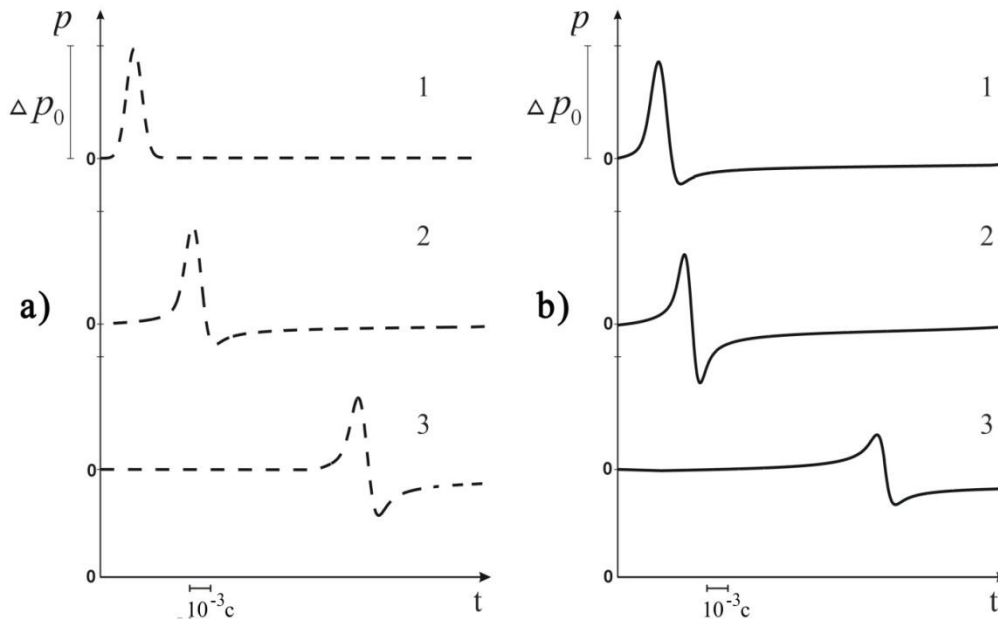
$$S_1 = \frac{b_0}{4\mu_l + 4\mu_l \eta_\mu (b_0/a_0)^2 - i \omega \rho_{l0}^0 b_0^2}, \quad S_2 = \frac{i}{\omega} \left[ S_1 + \frac{1}{\rho_{l0}^0 C_l \varphi_{g0}^{1/3}} \right].$$

## Пузырьки газа находятся внутри жидкости



Зависимости коэффициента затухания  $\delta$  и фазовой скорости  $C_p$  «быстрой» (пунктирные линии) и «медленной» (сплошные линии) волн от частоты  $\omega$  для системы песчаник – пузырьковая жидкость. Линия 1 соответствует  $a_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $b_0 = 10^{-4} \text{ м}$ ,  $\alpha_{s0} = 0,6$ ,  $\alpha_{l0} = 0,39$ ,  $\alpha_{g0} = 0,01$ . Линия 2 –  $a_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $b_0 = 10^{-4} \text{ м}$ ,  $\alpha_{s0} = 0,6$ ,  $\alpha_{l0} = 0,35$ ,  $\alpha_{g0} = 0,05$ .

## Пузырьки газа находятся внутри жидкости



Линии 1, 2, 3 соответствуют показаниям датчиков D1, D2 и D3 расположенных соответственно на расстоянии 0,01м; 0,5м и 2м от места инициирования первоначального импульсного давления.

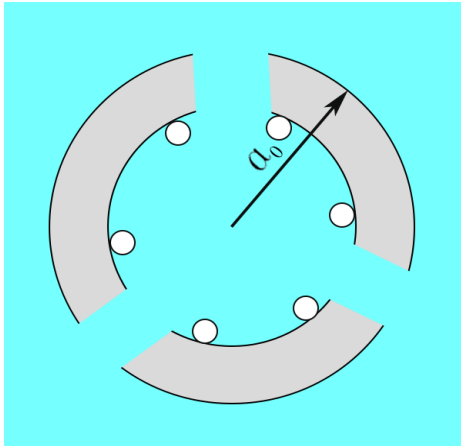
Динамика волнового импульса в пористой среде, насыщенной пузырьковой жидкостью. Характерные размеры пор:  $a_0 = 10^{-3}$  м,  $b_0 = 10^{-4}$  м,  $\alpha_{s0} = 0,6$ ,  $\alpha_{l0} = 0,39$ ,  $\alpha_{g0} = 0,01$ .

Картинки а) и б) соответствуют «быстрой» и «медленной» волнам.

# Основные уравнения

## Пузырьки газа расположены на стенках пор ( $v_s = v_g$ )

В этом случае используется система, приведенная в случае, когда размер пузырьков превышает размеры пор, но уравнения импульсов изменяются с учетом того, что скорость (пузырьков) газа равна скорости скелета. Эти уравнения имеют вид:



$$\alpha_{l0} \rho_{l0}^0 \frac{\partial v_l}{\partial t} = -\alpha_{l0} \frac{\partial p_l}{\partial x} - F, \quad F = F_m + F_\mu + F_B,$$

$$\alpha_{l0} \rho_{l0}^0 \frac{\partial v_l}{\partial t} + (\alpha_{s0} \rho_{s0}^0 + \alpha_{g0} \rho_{g0}^0) \frac{\partial v_s}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_s^*}{\partial x} - \frac{\partial p_l}{\partial x},$$

$$F_m = \frac{1}{2} \eta_m \alpha_{l0} (\alpha_{s0} + \alpha_{g0}) \rho_{l0}^0 \left( \frac{\partial v_l}{\partial t} - \frac{\partial v_s}{\partial t} \right),$$

$$F_\mu = \frac{9}{2} \eta_\mu (\alpha_{s0} + \alpha_{g0}) \alpha_{l0} \mu_l (v_l - v_s) a_0^{-2},$$

$$F_B = 6\eta_B (\alpha_{s0} + \alpha_{g0}) \alpha_{l0} a_0^{-1} \sqrt{\pi \rho_g^0 \mu_l} \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} (v_l - v_s) \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}}.$$

# Дисперсионное соотношение

## Пузырьки газа расположены на стенках пор

$$K^2 = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}},$$

$$\text{где } \frac{b}{a} = B_6 C_s^{-2} + B_5 \left( \frac{(1-\alpha_{s0})\rho_1 \chi_\mu}{\alpha_{l0}} C_s^{-2} - C_l^{-2} - \frac{\alpha_{g0}}{\alpha_{l0} \rho_3 N} C_g^{-2} \right),$$

$$\frac{c}{a} = \frac{B_7}{\chi_\mu} \left[ \rho_1 C_s^{-4} + \frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{s0}} C_l^{-2} C_s^{-2} + \frac{\alpha_{g0}}{\alpha_{s0} \rho_3 N} C_g^{-2} C_s^{-2} \right], \quad B_5 = 1 + i\chi_V (1 - \alpha_{l0}),$$

$$B_6 = (1 - \alpha_{s0}) - \alpha_{l0} \rho_1 \alpha_{s0} \chi_\mu + \alpha_{l0} (\alpha_{s0} \rho_2 + \alpha_{s0}) - (1 - \alpha_{l0} \rho_1 (1 - i\chi_V)) / \alpha_{l0} \alpha_{s0} \chi_\mu,$$

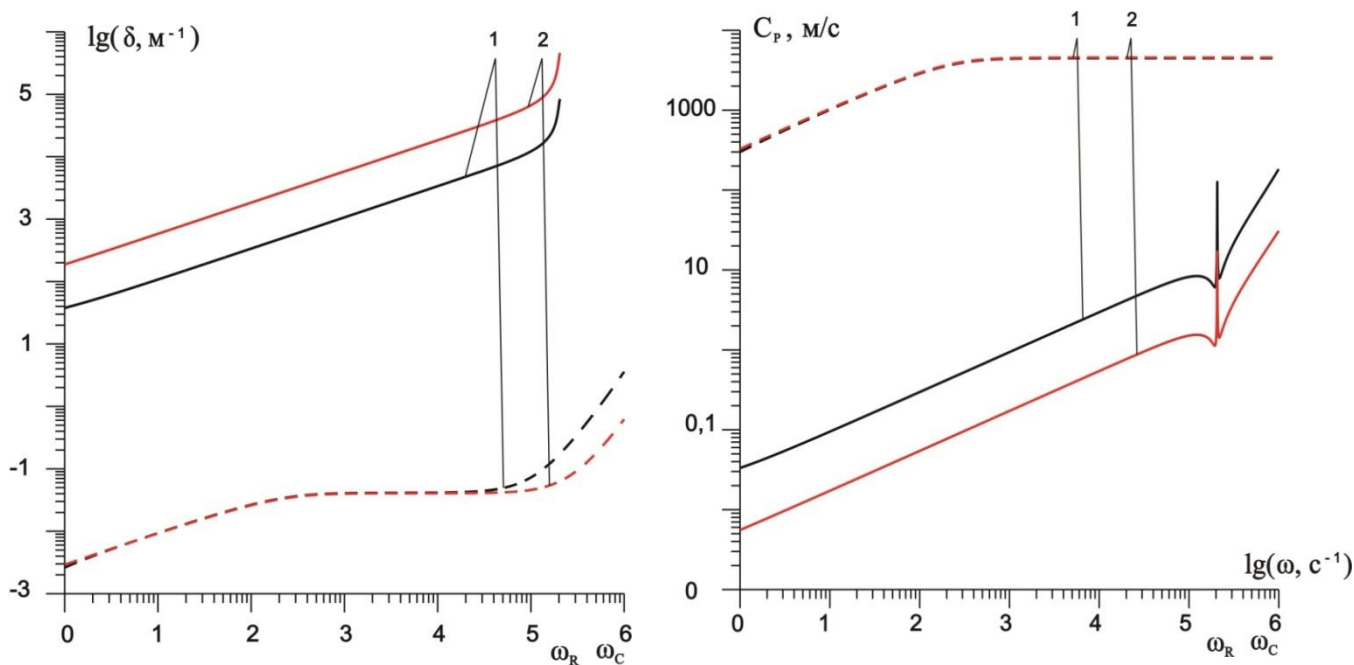
$$B_7 = B_5 (\alpha_{s0} \rho_2 + \alpha_{l0}) + i\chi_V (1 - \alpha_{l0}) \rho_1,$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_{l0}^0}{\rho_{s0}^0}, \quad \rho_2 = \frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{s0}^0}, \quad \rho_3 = \frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{l0}^0}, \quad C_g = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_{g0}^0}}, \quad C_s = \sqrt{\frac{E_s}{\rho_{s0}^0}}, \quad N = 1 + \frac{b_0}{3\gamma p_0 S_2},$$

$$\chi_V = \frac{1}{\omega \tau^*}, \quad \tau^{*-1} = \frac{1}{2} \left( -i\omega \eta_m + 9\eta_\mu v_g a_0^{-2} + \frac{9}{2} \eta_B (1-i) a_0^{-1} \sqrt{2v_g \omega} \right), \quad v_g = \frac{\mu_g}{\rho_{g0}^0},$$

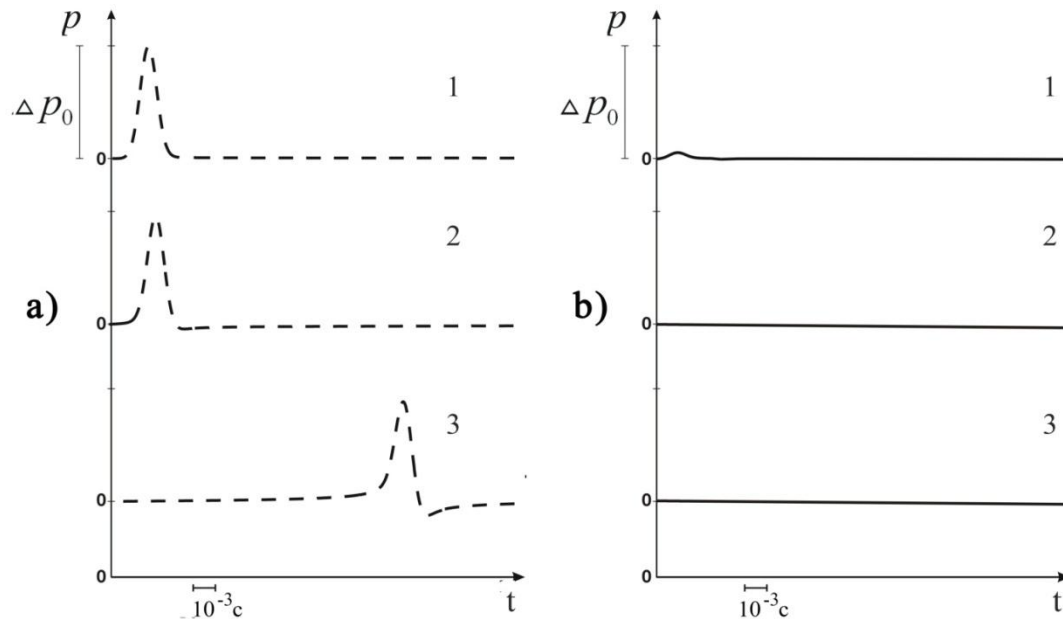
$$S_1 = \frac{b_0}{4\mu_l + 4\mu_l \eta_\mu (b_0/a_0)^2 - i\omega \rho_{l0}^0 b_0^2}, \quad S_2 = \frac{i}{\omega} \left[ S_1 + \frac{1}{\rho_{l0}^0 C_l \phi_{g0}^{1/3}} \right].$$

## Пузырьки газа расположены на стенках пор



Зависимости коэффициента затухания  $\delta$  и фазовой скорости  $C_p$  «быстрой» (пунктирные линии) и «медленной» (сплошные линии) волн от частоты  $\omega$  для системы песчаник – пузырьковая жидкость. Линия 1 соответствует  $a_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $b_0 = 10^{-4} \text{ м}$ ,  $\alpha_{s0} = 0,39$ ,  $\alpha_{l0} = 0,6$ ,  $\alpha_{g0} = 0,01$ . Линия 2 –  $a_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $b_0 = 10^{-4} \text{ м}$ ,  $\alpha_{s0} = 0,35$ ,  $\alpha_{l0} = 0,6$ ,  $\alpha_{g0} = 0,05$ .

## Пузырьки газа расположены на стенках пор



Линии 1, 2, 3 соответствуют показаниям датчиков D1, D2 и D3 расположенных соответственно на расстоянии 0,01м; 0,5м и 2м от места инициирования первоначального импульсного давления.

Динамика волнового импульса в пористой среде, насыщенной пузырьковой жидкостью. Характерные размеры пор:  $a_0 = 10^{-3}$  м,  $b_0 = 10^{-4}$  м,  $\alpha_{s0} = 0,39$ ,  $\alpha_{l0} = 0,6$ ,  $\alpha_{g0} = 0,01$ .

Картинки а) и б) соответствуют «быстрой» и «медленной» волнам.



---

## Заключение

1. Исследован процесс распространения акустических волн в пористой среде, насыщенной газожидкостной смесью, в двухскоростном приближении с учетом межфазных сил взаимодействия между жидкостью и скелетом. Проанализированы три ситуации расположения пузырьков в пористой среде.
2. Показано, что для всех случаев существуют три диапазона частот, где качественно и количественно меняется зависимости фазовой скорости звука и коэффициента затухания. Эти диапазоны зависят от характеристик пузырьковой среды.
3. Установлено существование полосы непропускания, при которой коэффициент затухания и фазовая скорость принимают аномально высокие значения.
4. Методом быстрого преобразования Фурье исследована динамика импульсного сигнала в пористой среде, насыщенной пузырьковой жидкостью для всех трех случаев. Установлено, что «быстрая» волна сохраняет свою амплитуду и форму на достаточно большом расстоянии для всех трех случаев. «Медленная» волна быстро затухает для случаев, когда пузырьки намного больше пор и когда они находятся на стенках пор.

---

**Спасибо за внимание!**